



技能背景下推荐学习路径的新方法

王荣海^{1,2}, 智慧来^{1,2}, 周银凤³, 李进金^{1,2,4}

1. 泉州师范学院 数学与计算机科学学院, 福建 泉州 362000;
2. 福建省大数据管理新技术与知识工程重点实验室, 福建 泉州 362000;
3. 陕西师范大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710119;
4. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000

摘要 形式概念分析为构建知识结构和寻找学习路径提供了强有力的工具。现有的基于技能背景推荐学习路径的方法需要遍历整个知识结构,不利于在大数据环境下推荐学习路径。针对此问题,该文在技能背景下,分别基于合取模型和析取模型提出了新的学习路径推荐方法。首先,分别在合取模型和析取模型下定义了知识状态关于技能的边缘。其次,分别在两种模型下基于知识状态关于技能的边缘给出推荐学习路径的方法。最后,通过在UCI的3个数据集下的实验验证所提出方法的有效性。通过该方法无需构建知识结构就能实现个性化推荐学习路径,弥补了现有方法的不足。

关键词 技能背景;面向属性概念;面向对象概念;知识状态;技能边缘;学习路径

中图分类号: TP182 **DOI**: 10.16152/j.cnki.xdxbr.2026-03-013

A new method for recommending learning paths based on skill context

WANG Ronghai^{1,2}, ZHI Huilai^{1,2}, ZHOU Yinfeng³, LI Jinjin^{1,2,4}

1. School of Mathematics and Computer Science, Quanzhou Normal University, Quanzhou 362000, China;
2. Fujian Provincial Key Laboratory of Data Intensive Computing, Quanzhou 362000, China;
3. School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710119, China;
4. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China

Abstract Formal concept analysis provides powerful tools for constructing knowledge structures and finding learning paths. However, existing methods for recommending learning paths based on skill context require traversing the entire knowledge structure, which is inefficient in a big data environment. To address this issue, this paper proposes new methods for recommending learning paths based on skill context using both conjunctive and disjunctive models. First, the concept of the fringe of knowledge states regarding skills is defined under both models. Next, methods for recommending learning paths are presented based on these fringes. Finally, experiments conducted on three UCI datasets demonstrate the effectiveness of the proposed methods. By using the methods presented in this paper, personalized learning path recommendations can be achieved without constructing the entire knowledge structure, thus overcoming the limitations of existing methods.

收稿日期: 2026-01-30 修回日期: 2026-02-10

基金项目: 国家自然科学基金(12271191); 福建省自然科学基金(2024J01793)。

第一作者: 王荣海, 男, 副教授, 从事智能教育、知识发现、软件工程研究, wrhai@qztc.edu.cn。

通信作者: 智慧来, 男, 博士, 教授, 从事形式概念分析、粗糙集、粒计算研究, zhihuilai@qztc.edu.cn。

Keywords skill context; attribute-oriented concept; object-oriented concept; knowledge state; skill fringe; learning path

随着大数据时代的到来,教育领域正经历着深刻的变革,个性化学习的趋势逐渐形成^[14]。如何根据学习者的个性特征推荐合适的学习路径是一个有价值且具有挑战的课题。知识空间理论^[5] (knowledge space theory, KST) 为知识评价和学习指导提供了有价值的理论框架。随着技能的引入^[6], KST 被推广到基于能力的知识空间理论^[7] (competence-based knowledge space theory, Cb-KST), 且被应用于自适应知识评估和指导学习等^[8-11]领域。

形式概念分析 (formal concept analysis, FCA) 为数据分析提供了强有力的工具, 并且在知识结构构建和技能评估方面表现出色^[12]。Rusch 和 Wille 于 1996 年首次建立了 KST 与 FCA 之间的联系, 为这两个领域的交叉研究奠定了基础^[13]。随后, 许多学者进一步研究了 Cb-KST 与 FCA 之间的有效联系。在技能约简方面, FCA 提供了系统的方法, 通过识别关键概念和技能, 可以简化复杂的知识结构, 提高技能评估和个性化学习推荐的效率^[14-16]。例如, 某些研究表明, 通过技能约简可以有效减少评估所需的时间和资源, 同时保持高水平的评估准确性^[14]。在技能评估领域, FCA 被用于开发精准的评估模型, 通过分析学习者的表现, 准确评估其掌握的技能水平^[15,17]。技能约简方法不仅提高了评估的准确性, 还为个性化学习路径的推荐提供了数据支持。FCA 在构建知识结构^[16,18-19]和推荐学习路径^[17,19]等方面也取得了显著的成果。

在 Cb-KST 中, 技能映射反映了问题与技能之间的关系^[20]。通过技能映射, 可以使用两种常见的模型(合取模型和析取模型)来诱导知识状态, 从而构建知识结构。在不同的模型下, 由技能集诱导知识状态的方式有所不同。因此, 在不同的模型下, 指导学习者对技能进行学习的学习路径也会有所差异。冯丹露等^[14]和周银凤等^[15]将技能映射转化成形式背景, 并称之为技能背景。在技能背景中, 面向属性概念^[21]和面向对象概念^[22-23]分别对应着技能映射的合取模型和析取模型。周银凤等^[17]和 Zhou 等^[19]在技能背景下, 给出了寻找和推荐学习路径的方法。技能映射在 Cb-KST 中的应用, 通过形式背景的

引入和合取、析取模型的使用, 不仅丰富了知识结构的构建方法, 也为个性化学习路径的推荐提供了有效的解决方案。Wang 等提出了一种利用技能层次结构进行学习者技能评测与学习路径规划的方法^[24]。Li 等提出了一种利用知识网络进行学习路径规划的方法^[3], 但此方法没有建立技能与待学习内容之间的联系。

现有的基于技能背景推荐学习路径的方法^[17,19]需要遍历整个知识结构来寻找一条合适的学习路径。该方法本质上是通过遍历整个知识结构获得所有的路径, 然后从中选择最优的一条路径进行推荐。该方法的效率较低, 具有很大的提升空间。本文为了避免对整个知识结构的遍历, 提出了一种效率更高的基于学习者学习状态的学习路径推荐方法。首先, 分别在合取模型和析取模型下给出知识状态关于技能边缘的定义。因此, 无需构建知识结构就可以找到一个知识状态的所有前继状态或后继状态, 为快速寻找学习路径提供了极大的便利。其次, 引进技能的学习复杂度和在已知知识状态下解决问题的学习成本。此外, 分别在合取模型和析取模型下基于知识状态关于技能的边缘给出推荐学习路径的方法, 为指导学习者的技能学习提供了新方法。最后, 使用 UCI 的 3 个数据集进行实验, 比较了本文所提出的推荐学习路径的方法与现有方法的性能。

1 预备知识

三元组 (Q, S, I) 称为一个技能背景, 其中, Q 为非空有限问题集, S 为非空有限技能集, $I \subseteq Q \times S$ 是 Q 与 S 之间的二元关系。 $\forall q \in Q, s \in S, (q, s) \in I$ 表示技能 s 与问题 q 的求解有关, $(q, s) \notin I$ 表示技能 s 与问题 q 的求解无关。

本文主要基于技能背景讨论推荐学习路径的方法。技能背景是一种特殊的形式背景, 在形式背景上定义的算子和算子的运算规则在技能背景上亦成立。

定义 1 设 (Q, S, I) 是一个技能背景。对 $q \in Q, s \in S$, 定义

$$q^* = \{s \in S \mid (q, s) \in I\} \quad (1)$$

$$s^* = \{q \in Q \mid (q, s) \in I\} \quad (2)$$

其中: q^* 表示与问题 q 的求解有关的技能集; s^* 表示求解与技能 s 有关的问题集。

定义 2 设 (Q, S, I) 是一个技能背景。对 $X \subseteq Q, B \subseteq S$, 定义

$$X^\diamond = \{s \in S \mid s^* \cap X \neq \emptyset\} \quad (3)$$

$$X^\square = \{s \in S \mid s^* \subseteq X\} \quad (4)$$

$$B^\diamond = \{q \in Q \mid q^* \cap B \neq \emptyset\} \quad (5)$$

$$B^\square = \{q \in Q \mid q^* \subseteq B\} \quad (6)$$

式中: $X^\diamond$ 表示与 X 中的问题求解有关的技能集; $X^\square$ 表示只能与 X 中的问题求解有关的技能集,即 $X^\square$ 中的技能不能用于求解 $Q \setminus X$ 中的问题,这些技能仅用于解决 X 中的问题,而不能用于解决其他问题; $B^\diamond$ 表示与 B 中的技能有关的问题集; $B^\square$ 表示只能与 B 中的技能有关的问题集,即 $B^\square$ 中问题的求解与 $S \setminus B$ 中的技能无关,这些问题只能通过 B 中的技能解决,而不能通过 B 之外的技能解决。

若二元组 (X, B) 满足 $X = B^\square$ 和 $B = X^\diamond$, 则称 (X, B) 是一个面向属性概念。若二元组 (X, B) 满足 $X = B^\diamond$ 和 $B = X^\square$, 则称 (X, B) 是一个面向对象概念。冯丹露等^[14] 和周银凤^[18] 指出, 对于概念 (X, B) , 若 (X, B) 是面向属性概念, 则 X 是由 B 通过合取模型诱导得到的知识状态; 若 (X, B) 是面向对象概念, 则 X 是由 B 通过析取模型诱导得到的知识状态。

性质 1 设 (Q, S, I) 是一个技能背景。对 $X, X_1, X_2 \subseteq Q, B, B_1, B_2 \subseteq S$, 以下性质成立:

$$1) X^\diamond = X^{\diamond \square \square}, X^{\square \diamond \square} = X^\square;$$

$$2) B^{\square \diamond \square} = B^\square, B^\diamond = B^{\diamond \square \square};$$

$$3) (X_1 \cup X_2)^\diamond = X_1^\diamond \cup X_2^\diamond,$$

$$(X_1 \cap X_2)^\square = X_1^\square \cap X_2^\square;$$

$$4) (B_1 \cup B_2)^\diamond = B_1^\diamond \cup B_2^\diamond,$$

$$(B_1 \cap B_2)^\square = B_1^\square \cap B_2^\square.$$

由性质 1 可知, $(X^{\diamond \square}, X^\diamond)$ 和 $(B^\square, B^{\square \diamond})$ 是面向属性概念, $(X^{\square \diamond}, X^\square)$ 和 $(B^\diamond, B^{\diamond \square})$ 是面向对象概念。在技能背景 (Q, S, I) 中, 用 $L_p(Q, S, I)$ 表示所有面向属性概念的集合, $L_o(Q, S, I)$ 表示所有面向对象概念的集合。从而得到两个完备格 $(L_p(Q, S, I), \leq)$ 和 $(L_o(Q, S, I), \leq)$, 且对任意 $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L_p(Q, S, I)$ (或 $L_o(Q, S, I)$), 有

$$(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \Leftrightarrow B_1 \subseteq B_2.$$

此外, 若 $(X_1, B_1) \leq (X_2, B_2)$ ($(X_1, B_1) \neq (X_2, B_2)$) 且不存在概念 $(X, B) \in L_p(Q, S, I)$ (或

$L_o(Q, S, I)$), 使得 $(X_1, B_1) \leq (X, B) \leq (X_2, B_2)$, 则记 $(X_1, B_1) < (X_2, B_2)$ 。

周银凤^[18] 和 Zhou 等^[19] 指出, 在技能背景 (Q, S, I) 中, 对于任意两个概念(面向属性概念或面向对象概念) (X_1, B_1) 和 (X_2, B_2) , 若 $(X_1, B_1) < (X_2, B_2)$, 则 X_2 是知识状态 X_1 的后继状态。为了方便, 若 $(X_1, B_1) < (X_2, B_2)$, 则称 X_1 是 X_2 的前继状态。此外, 若知识状态为 X_1 的学习者通过学习 $\omega \subseteq S$ 中的技能可转移至知识状态 X_2 , 则称 $X_1 \xrightarrow{\omega} X_2$ 是一条由 X_1 到 X_2 的有效学习路径。无特殊说明情况下, 下文提到的学习路径均是有效学习路径。

2 合取模型下推荐学习路径的方法

在技能背景 (Q, S, I) 中, 对于面向属性概念 $(X, B) \in L_p(Q, S, I)$, B 是使得 $X = B$ 的最小技能集。达到知识状态 X 的学习者至少掌握了 B 中的所有技能。如果学习者没有掌握 B 中的某些技能, 则他只能达到 X 的前继状态。因此, 本节在合取模型下先给出知识状态关于技能边缘的定义, 并给出推荐学习路径的方法。

定义 3 设 (Q, S, I) 为技能背景。在合取模型下, 对任意知识状态 X 和 $s \in X^\diamond$, 若不存在 $s' \in X^\diamond$ 使得 $X \setminus s^* \subset X \setminus s'^*$, 则称 s 是知识状态 X 关于技能的边缘元素。

根据定义 3 可知, 对任意知识状态 X , 知识状态 X 关于技能的边缘记作

$$C(X) = X^\diamond \setminus \bigcup_{s_i \in X^\diamond} \{s_j \in X^\diamond \mid X \setminus s_j^* \subset X \setminus s_i^*\} \quad (7)$$

由定义 3 可以看出, $C(X) \subseteq X^\diamond$ 。此外, 对任意 $s \in C(X), s_j \in X^\diamond, X \setminus s_j^* \supset X \setminus s^*$ 都不成立, 则可以通过求解 $C(X)$ 寻找知识状态 X 的所有前继状态。

定理 1 设 (Q, S, I) 为技能背景, X_1, X_2 是满足 $X_1 \subset X_2$ 的两个知识状态。在合取模型下, X_1 是 X_2 的前继状态, 当且仅当存在 $s \in C(X_2)$, 使得 $X_1 = X_2 \setminus s^*$ 。

证明 只需证明 $(X_1, X_1^\diamond) < (X_2, X_2^\diamond)$ 当且仅当存在 $s \in C(X_2)$, 使得 $X_1 = X_2 \setminus s^*$ 。

$\Rightarrow$ 假设 $X_2 = X_1 \cup X (X_1 \cap X = \emptyset)$ 。 $\forall s \in X_2^\diamond \setminus X_1^\diamond$, 有 $X_2 \cap s^* = X$; 否则, 存在 $s_1 \in X_2^\diamond \setminus X_1^\diamond$, 使得 $X_2 \cap s_1^* \subset X$, 则 $X_1 \subset X_2 \setminus s_1^* \subset X_2$ 。此

时, $(X_2 \setminus s_1^*)^{\diamond} = X_2 \setminus s_1^*$, 即 $(X_2 \setminus s_1^*, (X_2 \setminus s_1^*)^{\diamond}) \in L_p(Q, S, I)$ 且 $(X_1, X_1^{\diamond}) \leq (X_2 \setminus s_1^*, (X_2 \setminus s_1^*)^{\diamond}) \leq (X_2, X_2^{\diamond})$, 这与 $(X_1, X_1^{\diamond}) < (X_2, X_2^{\diamond})$ 相矛盾。因此, $\forall s \in X_2^{\diamond} \setminus X_1^{\diamond}$, 有 $X_2 \cap s^* = X$, 从而有 $X_1 = X_2 \setminus X = X_2 \setminus (X_2 \cap s^*) = X_2 \setminus s^*$ 。以下证 $X_2^{\diamond} \setminus X_1^{\diamond} \subseteq C(X_2)$, 即 $\forall s \in X_2^{\diamond} \setminus X_1^{\diamond}$, 有 $s \in C(X_2)$; 否则, 存在 $s_i \in X_2^{\diamond}$, 使得 $X_1 = X_2 \setminus s^* \subset X_2 \setminus s_i^*$ 。显然, $s_i \notin X_2^{\diamond} \setminus X_1^{\diamond}$, 即 $s_i \in X_1^{\diamond}$, 这意味着 $s_i^* \cap X_1 \neq \emptyset$, 这与 $X_1 \subset X_2 \setminus s_i^*$ 相矛盾。综上, 存在 $s \in C(X_2)$ 使得 $X_1 = X_2 \setminus s^*$ 。

$\Leftarrow$ 已知存在 $s \in C(X_2)$, 使得 $X_1 = X_2 \setminus s^*$ 。由 $X_1 \subset X_2$ 得 $(X_1, X_1^{\diamond}) \leq (X_2, X_2^{\diamond})$ 且 $(X_1, X_1^{\diamond}) \neq (X_2, X_2^{\diamond})$ 。假设存在 $B \subseteq X_2^{\diamond} (B \neq \emptyset)$, 使得 $((X_2^{\diamond} \setminus B)^{\square}, X_2^{\diamond} \setminus B) \in L_p(Q, S, I)$ 且 $(X_1, X_1^{\diamond}) \leq ((X_2^{\diamond} \setminus B)^{\square}, X_2^{\diamond} \setminus B) \leq (X_2, X_2^{\diamond})$, 则 $X_1 \subset (X_2^{\diamond} \setminus B)^{\square} \subset X_2$, 即 $X_2 \setminus s^* \subset X_2 \setminus B^{\diamond} \subset X_2$ 。所以, $X_2 \setminus s^* \subset \bigcap_{s_i \in B} X_2 \setminus s_i^*$, 这意味着对 $s_i \in B$, 有 $X_2 \setminus s^* \subset X_2 \setminus s_i^*$, 这与 $s \in C(X_2)$ 相矛盾。因此, $(X_1, X_1^{\diamond}) < (X_2, X_2^{\diamond})$ 。

由定理1可知, 只需要遍历 $C(X_2)$, 找出是否存在 $s \in C(X_2)$, 使得 $X_1 = X_2 \setminus s^*$, 就能确定 X_1 是不是 X_2 的前继状态, 而无需求出所有的面向属性概念来确定 X_2 的前继状态。

例1 给定如表1所示技能背景 (Q, S, I) , 其中, $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ 。

表1 技能背景 (Q, S, I)

Tab. 1 Skill context (Q, S, I)

Q	a	b	c	d	e	f
1	1	1	0	1	0	1
2	1	1	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1	1
5	0	0	0	0	1	1

由定义1可得:

$a^* = \{1, 2, 4\}, b^* = \{1, 2, 3, 4\}, c^* = \{2, 3\}, d^* = \{1\}, e^* = \{4, 5\}, f^* = \{1, 4, 5\}$ 。

给定知识状态 $X = Q$, 则 $X^{\diamond} = S$ 。由定义3和 $X \setminus a^* = \{3, 5\}, X \setminus b^* = \{5\}, X \setminus c^* = \{1, 4, 5\}, X \setminus d^* = \{2, 3, 4, 5\}, X \setminus e^* = \{1, 2, 3\}, X \setminus f^* = \{2, 3\}$, 可得 $C(X) = S \setminus \{a, b, f\} = \{c, d, e\}$ 。因此, 由定理1可知, 知识状态 X 的前继状态有 $\{1,$

$4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$ 和 $\{1, 2, 3\}$ 。

已知 $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L_p(Q, S, I)$ 且 $(X_1, B_1) < (X_2, B_2)$, 则知识状态为 X_1 的学习者需要学习 $B_2 \setminus B_1$ 中的所有技能以达到知识状态 X_2 。若已知学习者的知识状态为 X 和目标知识状态 X_0 , 则可通过求目标知识状态 X_0 关于技能的边缘来推荐合适的学习路径。

与文献[19]类似, 用 $\alpha(s)$ 表示技能 s 的学习复杂度。不同的是, 本文引进知识状态为 X 的学习者解决问题 q 需要付出的学习成本 $\delta(X, q)$ 。用需要新学习的技能的学习复杂度所占比例来衡量解决问题 q 需要付出的学习成本, 即 $\delta(X, q) =$

$\frac{\sum_{s \in q^* \setminus X^{\diamond}} \alpha(s)}{\sum_{s \in q^*} \alpha(s)}$ 。对于目标知识状态 X_0, X_0 可能有多个前继状态。不同的前继状态到目标知识状态 X_0 需要解决的问题不同, 即需要付出的学习成本不同。本节从全局的角度出发, 在合取模型下选择推荐需要付出的学习成本最低的学习路径。合取模型下, 推荐学习路径的算法如算法1所示。

算法1 合取模型下推荐学习路径。

输入 技能背景 (Q, S, I) , 知识状态 X 和目标知识状态 X_0 。

输出 由知识状态 X 到目标知识状态 X_0 的一条学习路径。

步骤1 计算 $B = X^{\diamond}, B_0 = X_0^{\diamond}$ 。

步骤2 计算知识状态 X_0 关于技能的边缘 $C(X_0)$ 。

步骤3 若存在 $s \in C(X_0)$, 使得 $X = X_0 \setminus s^*$, 则输出学习路径 $X \rightarrow X_0$; 否则, 转到步骤4。

步骤4 $i = 1$, 重复以下过程直至存在 $s \in C(X_{i-1})$, 使得 $X = X_{i-1} \setminus s^*$ 。

1) 计算

$$s_i = \arg \min_{s \in C(X_{i-1}), X \subseteq X_{i-1} \setminus s^*} \sum_{q \in X_{i-1} \cap s^*} \delta(X_{i-1} \setminus s^*, q),$$

其中

$$\delta(X_{i-1} \setminus s^*, q) = \frac{\sum_{s \in q^* \setminus (X_{i-1} \setminus s^*)^{\diamond}} \alpha(s)}{\sum_{s \in q^*} \alpha(s)};$$

2) $X_i \leftarrow X_{i-1} \setminus s_i^*$;

3) $B_i \leftarrow X_i^{\diamond}$;

4) 计算 $C(X_i)$;

5) $i = i + 1$;

并输出学习路径 $X \xrightarrow{B_{i-1} \setminus B} X_{i-1} \xrightarrow{B_{i-2} \setminus B_{i-1}} X_{i-2} \cdots X_2 \xrightarrow{B_1 \setminus B_2} X_1$

$$B_0 \setminus B_1 \rightarrow X_0.$$

例 2 对于表 1 给定的技能背景 (Q, S, I) , 假设在合取模型下, 技能集 S 中各个技能的学习复杂度分别为

$$\alpha(a) = 0.43, \alpha(b) = 0.3, \alpha(c) = 0.53, \alpha(d) = 0.65, \alpha(e) = 0.55, \alpha(f) = 0.42.$$

设学习者的知识状态为 $\emptyset$ 且目标知识状态为 Q , 则由例 1 可知

$$C(Q) = \{c, d, e\}.$$

由 $c^* = \{2, 3\}$, $d^* = \{1\}$, $e^* = \{4, 5\}$ 可得

$$\begin{aligned} \sum_{q \in Q \cap c^*} \delta(Q \setminus c^*, q) &= 1.06, \\ \sum_{q \in Q \cap d^*} \delta(Q \setminus d^*, q) &= 0.36, \\ \sum_{q \in Q \cap e^*} \delta(Q \setminus e^*, q) &= 0.89. \end{aligned}$$

从而得到 $\arg \min_{s \in C(Q)} \sum_{q \in Q \cap s^*} \delta(Q \setminus s^*, q) = d$ 。由此得

到知识状态 Q 的前继状态 $X_1 = Q \setminus d^* = \{2, 3, 4, 5\}$ 。对于知识状态 X_1 , 由定义 1 得

$$C(X_1) = \{a, c, e, f\}.$$

由 $X_1 \cap a^* = \{2, 4\}$, $X_1 \cap c^* = \{2, 3\}$ 和 $X_1 \cap e^* = X_1 \cap f^* = \{4, 5\}$ 可得

$$\begin{aligned} \sum_{q \in X_1 \cap a^*} \delta(X_1 \setminus a^*, q) &= 0.59, \\ \sum_{q \in X_1 \cap c^*} \delta(X_1 \setminus c^*, q) &= 1.06, \\ \sum_{q \in X_1 \cap e^*} \delta(X_1 \setminus e^*, q) &= 1.57, \\ \sum_{q \in X_1 \cap f^*} \delta(X_1 \setminus f^*, q) &= 1.57. \end{aligned}$$

从而得到 $\arg \min_{s \in C(X_1)} \sum_{q \in X_1 \cap s^*} \delta(X_1 \setminus s^*, q) = a$ 。由此

得到知识状态 X_1 的前继状态 $X_2 = X_1 \setminus a^* = \{3, 5\}$ 。同理, 可以得到由知识状态 $\emptyset$ 到目标知识状态 Q 的一条学习路径为

$$\emptyset \xrightarrow{b, c} \{3\} \xrightarrow{e, f} \{3, 5\} \xrightarrow{a} \{2, 3, 4, 5\} \xrightarrow{d} Q.$$

已知知识状态 X 和目标知识状态 X_0 , 通过算法 1 给定的方法可以找到一条由 X 到 X_0 的学习路径。这条学习路径是学习成本最低的一条学习路径, 根据这条学习路径可以有效地指导学习者进行学习。

3 析取模型下推荐学习路径的方法

在技能背景 (Q, S, I) 中, 对于面向对象概念

$(X, B) \in L_o(Q, S, I)$, B 是使得 $X = B^\diamond$ 的最大技能集。达到知识状态 X 的学习者至多掌握了 B 中的所有技能。也就是说, 如果学习者掌握了 $\sim B$ 中的某些技能, 则他能够达到知识状态 X 的后继状态。由此, 本节在析取模型下先给出知识状态关于技能边缘的定义, 并给出推荐学习路径方法。

定义 4 设 (Q, S, I) 为技能背景。在析取模型下, 对任意知识状态 X 和 $s \in (S \setminus X^\square)$, 若不存在 $s' \in (S \setminus X^\square)$, 使得 $s'^* \cap (Q \setminus X) \subset s^* \cap (Q \setminus X)$, 则称 s 是知识状态 X 关于技能的边缘元素。

根据上述定义, 对任意知识状态 X , 知识状态 X 关于技能的边缘记作

$$\begin{aligned} D(X) &= \sim X^\square \setminus \\ &\quad \bigcup_{s_i \in \sim X^\square} \{s_j \in \sim X^\square \mid s_i^* \setminus X \subset s_j^* \setminus X\} \end{aligned} \quad (8)$$

由定义 4 可以看出 $D(X) \subseteq \sim X^\square$ 。此外, 对任意 $s \in D(X)$, $s_j \in \sim X^\square$, $s^* \setminus X \supset s_j^* \setminus X$ 都不成立。这意味着可以通过求解 $D(X)$ 寻找知识状态 X 的所有后继状态。

定理 2 设 (Q, S, I) 为技能背景, X_1, X_2 是满足 $X_1 \subset X_2$ 的两个知识状态。在析取模型下, X_2 是 X_1 的后继状态, 当且仅当存在 $s \in D(X_1)$, 使得 $X_2 = X_1 \cup s^*$ 。

证明 只需证明 $(X_1, X_1^\square) < (X_2, X_2^\square)$, 当且仅当存在 $s \in D(X_1)$, 使得 $X_2 = X_1 \cup s^*$ 。

$\Rightarrow$ 假设 $X_2 = X_1 \cup X (X_1 \cap X = \emptyset)$ 。 $\forall s \in X_2^\square \setminus X_1^\square$ 有 $s^* \setminus X_1 = X$, 否则存在 $s_1 \in X_2^\square \setminus X_1^\square$, 使得 $s_1^* \setminus X_1 \subset X$, 则 $X_1 \subset X_1 \cup (s_1^* \setminus X_1) \subset X_2$ 。此时, $X_1 \cup (s_1^* \setminus X_1) = X_1 \cup s_1^* = (X_1 \cup s_1^*)^\square$, 即 $(X_1 \cup s_1^*, (X_1 \cup s_1^*)^\square) \in L_o(Q, S, I)$ 且 $(X_1, X_1^\square) \leq (X_1 \cup s_1^*, (X_1 \cup s_1^*)^\square) \leq (X_2, X_2^\square)$, 这与 $(X_1, X_1^\square) < (X_2, X_2^\square)$ 相矛盾。因此, $\forall s \in X_2^\square \setminus X_1^\square$ 有 $s^* \setminus X_1 = X$, 从而有 $X_2 = X_1 \cup (s^* \setminus X_1) = X_1 \cup s^*$ 。以下证 $X_2^\square \setminus X_1^\square \subseteq D(X_1)$, 即 $\forall s \in X_2^\square \setminus X_1^\square$ 有 $s \in D(X_1)$, 否则存在 $s_i \in \sim X_1^\square$, 使得 $s_i^* \setminus X_1 \subset s^* \setminus X_1 = X$ 。显然, $s_i \notin X_2^\square \setminus X_1^\square$, 即 $s_i \in \sim X_2^\square$, 从而 $s_i^* \subseteq X_2$ 不成立, 这与 $s_i^* \setminus X_1 \subset X$ 相矛盾。综上, 存在 $s \in D(X_1)$ 使得 $X_2 = X_1 \cup s^*$ 。

$\Leftarrow$ 已知存在 $s \in D(X_1)$ 使得 $X_2 = X_1 \cup s^*$ 。由 $X_1 \subset X_2$ 得 $(X_1, X_1^\square) \leq (X_2, X_2^\square)$ 且 $(X_1, X_1^\square) \neq (X_2, X_2^\square)$ 。假设存在 $B \subseteq \sim X_1^\square (B \neq \emptyset)$

使得 $((X_1^\square \cup B)^\diamond, X_1^\square \cup B) \in L_0(Q, S, I)$ 且 $(X_1, X_1^\square) \leq ((X_1^\square \cup B)^\diamond, X_1^\square \cup B) \leq (X_2, X_2^\square)$, 则 $X_1 \subset (X_1^\square \cup B)^\diamond \subset X_2$, 即 $X_1 \subset X_1 \cup B^\diamond \subset X_1 \cup s^*$ 。所以, $B^\diamond \setminus X_1 \subset s^* \setminus X_1$, 这意味着对 $s_i \in B$ 有 $s_i^* \setminus X_1 \subset s^* \setminus X_1$, 这与 $s \in D(X_1)$ 相矛盾。因此, $(X_1, X_1^\square) < (X_2, X_2^\square)$ 。

由定理2可知, 只需要遍历 $D(X_1)$, 找出是否存在 $s \in D(X_1)$, 使得 $X_2 = X_1 \cup s^*$, 就能确定 X_2 是不是 X_1 的后继状态, 而无需求出所有的面向对象概念来确定 X_1 的后继状态。

例3 对于表1给定技能背景 (Q, S, I) 。若知识状态 $X = \emptyset$, 则 $\sim X^\square = S$ 。由定义4和 $a^* \setminus X = \{1, 2, 4\}, b^* \setminus X = \{1, 2, 3, 4\}, c^* \setminus X = \{2, 3\}, d^* \setminus X = \{1\}, e^* \setminus X = \{4, 5\}, f^* \setminus X = \{1, 4, 5\}$ 。可得 $D(X) = S \setminus \{a, b, f\} = \{c, d, e\}$ 。因此, 由定理2可知, 知识状态 X 的后继状态有 $\{2, 3\}, \{1\}$ 和 $\{4, 5\}$ 。

已知 $(X_1, B_1), (X_2, B_2) \in L_0(Q, S, I)$ 且 $(X_1, B_1) < (X_2, B_2)$ 。由定理2的证明可知, $B_2 \setminus B_1 \subseteq D(X_1)$ 且对 $\forall s \in B_2 \setminus B_1$ 有 $X_2 = X_1 \cup s^*$ 。也就是说, 知识状态为 X_1 的学习者学习 $B_2 \setminus B_1$ 中的某个技能足以达到知识状态 X_2 。若已知学习者的知识状态为 X_0 和目标知识状态 X , 则可通过求知识状态 X_0 关于技能的边缘来推荐合适的学习路径。

与第3节类似, 引进知识状态为 X 的学习者解决问题 q 需要付出的学习成本。不同的是, 在析取模型下, 学习者只需要掌握与问题 q 的求解有关的一个技能就能解决问题 q 。因此, 在析取模型下可直接用技能的学习复杂度衡量学习成本。对于已知的知识状态 X_0, X_0 可能有多个后继状态。由知识状态 X_0 到 X_0 的不同后继状态需要学习不同的技能, 即需要付出的学习成本不同。本节从全局的角度出发, 在析取模型下先选择解决的问题最多, 再选择学习成本最低的学习路径。在析取模型下, 推荐学习路径的算法如算法2所示。

算法2 析取模型下, 推荐学习路径的算法。

输入 技能背景 (Q, S, I) , 知识状态 X_0 和目标知识状态 X 。

输出 由知识状态 X_0 到目标知识状态 X 的一条学习路径。

步骤1 计算 $B_0 = X_0^\square, B = X^\square$ 。

步骤2 计算知识状态 X_0 的边缘 $D(X_0)$ 。

步骤3 若存在 $s \in D(X_0)$ 使得 $X = X_0 \cup s^*$, 则输出学习路径 $X_0 \rightarrow X$, 其中

$$s' = \arg \min_{s \in B \setminus B_0} \alpha(s),$$

否则, 转到步骤4。

步骤4 $i = 1$, 重复以下过程直至存在 $s \in D(X_{i-1})$ 使得 $X = X_{i-1} \cup s^*$ 。

$$1) \text{ 计算 } s_i = \arg \max_{s \in D(X_{i-1}), s^* \subseteq X} |s^* \setminus X_{i-1}|;$$

$$2) X_i \leftarrow X_{i-1} \cup s_i^*;$$

$$3) B_i \leftarrow X_i^\square;$$

$$4) \text{ 计算 } s'_i = \arg \min_{s \in B_i \setminus B_{i-1}} \alpha(s);$$

$$5) i = i + 1;$$

并输出学习路径 $X_0 \xrightarrow{s'_1} X_1 \xrightarrow{s'_2} X_2 \cdots X_{i-2} \xrightarrow{s'_{i-1}} X_{i-1} \xrightarrow{s'} X$, 其中 $s' = \arg \min_{s \in B \setminus B_{i-1}} \alpha(s)$ 。

例4 对于表1给定的技能背景 (Q, S, I) , 假设在析取模型下技能集 S 中各个技能的学习复杂度分别为

$$\alpha(a) = 0.51, \alpha(b) = 0.63, \alpha(c) = 0.4, \alpha(d) = 0.31, \alpha(e) = 0.42, \alpha(f) = 0.5。$$

设学习者的知识状态为 $\emptyset$ 且目标知识状态为 Q , 由例3知道

$$D(\emptyset) = \{c, d, e\}。$$

根据 $c^* = \{2, 3\}, d^* = \{1\}, e^* = \{4, 5\}$ 可取 $\arg \max_{s \in D(\emptyset)} |s^* \setminus \emptyset| = c$ 。由此得到知识状态 $X_1 = \{2, 3\}$ 和能力状态 $B_1 = X_1^\square = \{c\}$ 。因此, 推荐知识状态为 $\emptyset$ 的学习者优先学习技能 c 以达到知识状态 X_1 。对于知识状态 X_1 , 由定义4得

$$D(X_1) = \{d, e\}。$$

由 $\arg \max_{s \in D(X_1)} |s^* \setminus X_1| = e$, 得到知识状态 $X_2 = \{2, 3, 4, 5\}$ 和能力状态 $B_2 = X_2^\square = \{c, e\}$ 。因此, 推荐知识状态为 X_1 的学习者优先学习技能 e 以达到知识状态 X_2 。同理得到 $D(X_2) = \{a, b, d, f\}$ 且取 $\arg \max_{s \in D(X_2)} |s^* \setminus X_2| = a$, 则 $Q = X_2 \cup a^*$ 。由 $\arg \min_{s \in S \setminus B_2} \alpha(s) = d$, 则推荐知识状态为 X_2 的学习者优先学习技能 d 以达到知识状态 Q 。综上, 可以得到由知识状态 $\emptyset$ 到目标知识状态 Q 的一条学习路径为 $\emptyset \xrightarrow{c} \{2, 3\} \xrightarrow{e} \{2, 3, 4, 5\} \xrightarrow{d} Q$ 。

已知知识状态 X_0 和目标知识状态 X , 通过算法2给定的方法可以找到一条由 X_0 到 X 的学习路径。这条学习路径是可以解决最多的问题且学习成本最低的一条学习路径。根据这条学习路径可

以有效地指导学习者进行学习。

4 实验及结果分析

本节通过运行时间说明本文提出方法的性能。所有实验的硬件环境为 Windows 10, Intel (R) Core(TM) i7 - 9700 CPU @ 3.00 GHz 和内存 16 GiB,软件环境为 Python 3.11。

本文从 UCI 数据集中选取 3 个数据集进行实验。选取的 3 个数据集均为数值型数据且不存在缺失值。在每个数据集中,将小于列均值的元素转换成 0,大于列均值的元素转换成 1。由此得到 3 个处理后的数据集如表 2 所示。此外,为每个数据的每个技能随机生成了 0 与 1 之间的实数,表示对应技能的学习复杂度。

表 2 处理后的数据集
Tab. 2 Processed datasets

序号	数据集	问题个数 ($ Q $)	技能个数 ($ S $)
1	Ferility	100	9
2	Connectionist Bench	528	10
3	Statlog	946	18

本文主要与文献[18-19]所提出的方法做比较。文献[18]是文献[19]的特殊情形。在合取模型和析取模型下,根据文献[18-19]所提出的寻找学习路径的方法需要遍历整个知识结构。此外,文献[19]根据技能的学习复杂度来选择学习路径。本文在合取模型和析取模型下给出了选择学习路径的新规则。为了方便,用简要的记号表示本文和文献[18-19]所提出方法和规则,分别如表 3 和表 4 所示。

表 3 寻找学习路径的方法表示
Tab. 3 Methods for finding learning paths

记号	含义
方法 A1	合取模型下,根据本文的方法寻找路径
方法 A2	合取模型下,根据文献[18-19]的方法寻找路径
方法 B1	析取模型下,根据本文的方法寻找路径
方法 B2	析取模型下,根据文献[18-19]的方法寻找路径

表 4 选择学习路径的规则表示
Tab. 4 Rules for choosing learning paths

记号	含义
规则 A1	合取模型下,根据本文的规则选择学习路径
规则 A2	合取模型下,根据文献[19]的规则选择学习路径
规则 B1	析取模型下,根据本文的规则选择学习路径
规则 B2	析取模型下,根据文献[19]的规则选择学习路径

在 3 个数据集中,分别在合取模型和析取模型下随机选择 50 个知识状态作为已知知识状态。在合取模型下,根据规则 A1,分别运用方法 A1 和方法 A2 推荐由 50 个已知知识状态到目标知识状态 Q 的学习路径,并记录运行时间如图 1 所示。在合取模型下,根据规则 A2,分别运用方法 A1 和方法 A2 推荐 50 个已知知识状态到目标知识状态 Q 的学习路径,并记录运行时间如图 2 所示。在析取模型下,根据规则 B1,分别运用方法 B1 和方法 B2 推荐由 50 个已知知识状态到目标知识状态 Q 的学习路径,并记录运行时间如图 3 所示。在析取模型下,根据规则 B2,分别运用方法 B1 和方法 B2 推荐 50 个已知知识状态到目标知识状态 Q 的学习路径,并记录运行时间如图 4 所示。图 1 ~ 图 4 中的(a) ~ (c)分别表示在数据集 Ferility、Connectionist Bench、Statlog 下的实验情况。

由图 1 ~ 图 4 可以发现,在相同的学习路径选择规则下,本文提出的寻找学习路径的方法(方法 A1 和方法 B1)与现有方法相比运行时间更短,说明本文提出的推荐学习路径的方法是有效的。

然而,上述方法仍不能完全实现学习路径的实时推荐。若已经建立技能背景且技能背景在短期内保持不变,则可以实时地依据学习者解决问题的情况给出相应的推荐;若技能背景处在经常性的变化之中,则需要进一步研究知识结构的动态更新对学习路径的影响,进而得到不确定环境下的学习路径推荐方法。

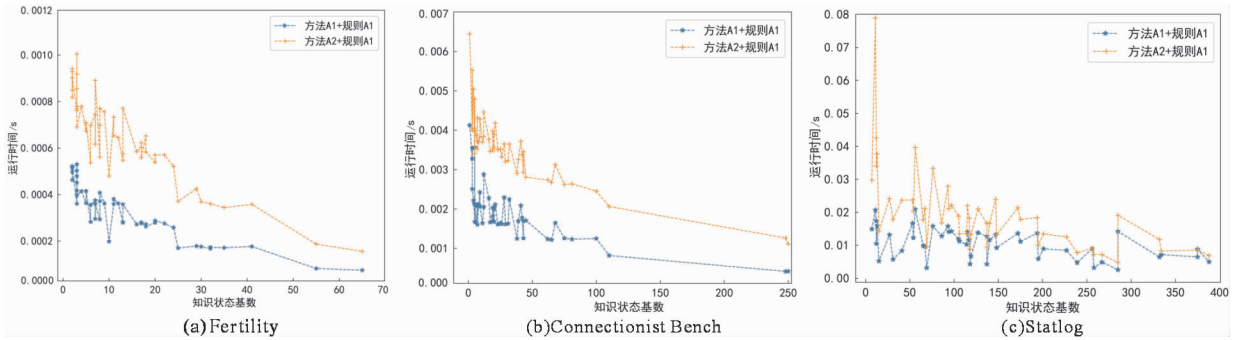


图1 方法 A1 和方法 A2 在规则 A1 下推荐学习路径的运行时间

Fig. 1 Runtime of methods A1 and A2 for recommending learning paths under rule A1

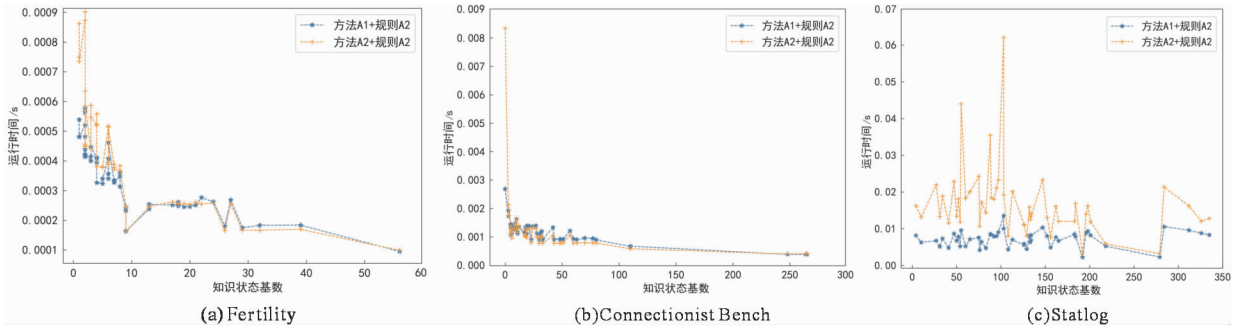


图2 方法 A1 和方法 A2 在规则 A2 下推荐学习路径的运行时间

Fig. 2 Runtime of methods A1 and A2 for recommending learning paths under rule A2

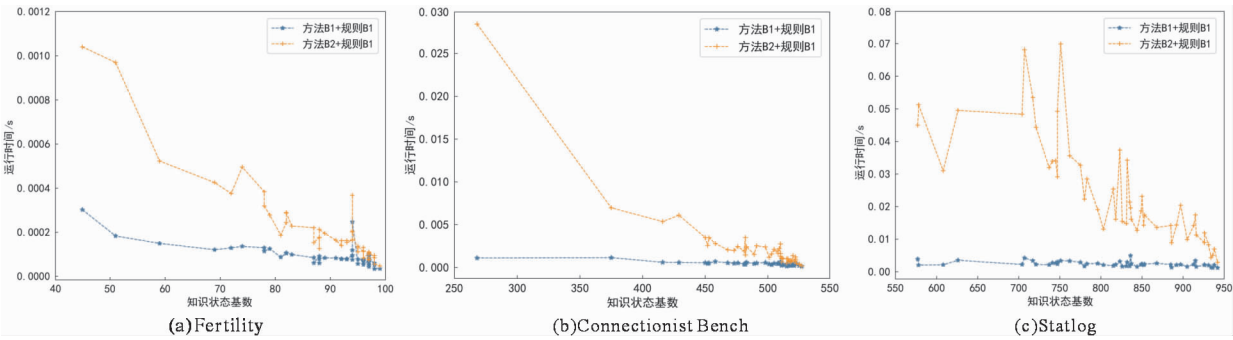


图3 方法 B1 和方法 B2 在规则 B1 下推荐学习路径的运行时间

Fig. 3 Runtime of methods B1 and B2 for recommending learning paths under rule B1

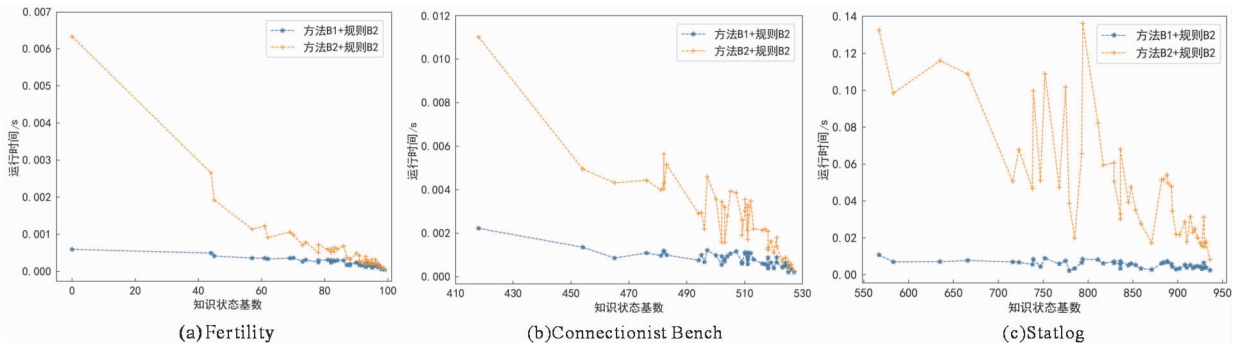


图4 方法 B1 和方法 B2 在规则 B2 下推荐学习路径的运行时间

Fig. 4 Runtime of methods B1 and B2 for recommending learning paths under rule B2

5 结语

本文基于技能背景,分别在合取模型和析取模型下提出了推荐学习路径的新方法。通过定义知识状态关于技能的边缘,能够快速找出知识状态的前继状态或后继状态,而无需构建完整的知识结构。这极大地简化了计算复杂度,提高了推荐学习路径的计算效率。在大数据环境下,通过不构建完整知识结构的方法来推荐学习路径,不仅能够显著减少计算资源的消耗,还能够更快地响应学习者的需求。这为实际教学应用提供了一个可行、有效的解决方案。根据不同的教学需求如何更新和改进路径选择规则,以更好地满足个性化学习的需要,是一个值得深入研究的方向。从处理不确定数据的角度,如何利用多层次粒描述的思想^[25]刻画知识状态值得深入探讨。此外,在不同的学习场景和学科中,如何有效应用和推广本文提出的方法,也需要进一步的实证研究和验证。

参考文献

- [1] BELLARHMOUCH Y, JEGHAL A, TAIRI H, et al. A proposed architectural learner model for a personalized learning environmen [J]. *Education and Information Technologies*, 2023, 28(4): 4243-4263.
- [2] CARBONE M, COLACE F, LOMBARDI M, et al. An adaptive learning path builder based on a context aware recommender system[C]//2021 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE). Lincoln, NE, USA: IEEE, 2021: 1-5.
- [3] LI H, GONG R R, ZHONG Z M, et al. Research on personalized learning path planning model based on knowledge network[J]. *Neural Computing and Applications*, 2023, 35(12): 8809-8821.
- [4] 朱佳,张丽君,梁婉莹. 数据驱动下的个性化自适应学习研究综述[J]. *华南师范大学学报(自然科学版)*, 2020, 52(4): 17-25.
ZHU J, ZHANG L J, LIANG W Y. A review of data-driven personalized adaptive learning[J]. *Journal of South China Normal University (Natural Science Edition)*, 2020, 52(4): 17-25.
- [5] DOIGNON J P, FALMAGNE J C. Spaces for the assessment of knowledge [J]. *International Journal of Man-Machine Studies*, 1985, 23(2): 175-196.
- [6] DÜNTSCH I, GEDIGA G. Skills and knowledge structures[J]. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 1995, 48(1): 9-27.
- [7] HELLER J, AUGUSTIN T, HOCKEMEYER C, et al. Recent developments in competence-based knowledge space theory [C] // FALMAGNE J C, ALBERT D, DOBLE C, et al. *Knowledge spaces: Applications in education*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2013: 243-286.
- [8] ANSELM P, HELLER J, STEFANUTTI L, et al. Constructing tests for skill assessment with competence-based test development [J]. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 2024, 77(3): 429-458.
- [9] BRANCACCIO A, DE CHIUSOLE D, STEFANUTTI L. Algorithms for the adaptive assessment of procedural knowledge and skills[J]. *Behavior Research Methods*, 2023, 55(7): 3929-3951.
- [10] DE CHIUSOLE D, STEFANUTTI L, ANSELM P, et al. Stat-knowlab. assessment and learning of statistics with competence-based knowledge space theory [J]. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 2020, 30(4): 668-700.
- [11] STEFANUTTI L, DE CHIUSOLE D. On the assessment of learning in competence based knowledge space theory [J]. *Journal of Mathematical Psychology*, 2017, 80: 22-32.
- [12] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [C] // *Ordered Sets*. Berlin, Germany: Springer, 1982: 445-470.
- [13] RUSCH A, WILLE R. Knowledge spaces and formal concept analysis [C] // *Data Analysis and Information Systems: Statistical and Conceptual Approaches*. Berlin, Germany: Springer, 1996: 427-436.
- [14] 冯丹露,周银凤. 基于面向问题概念格的技能约简与推测关系[J]. *闽南师范大学学报(自然科学版)*, 2021, 34(2): 36-44.
FENG D L, ZHOU Y F. Skill reduction and surmise relation based on object problem concept lattice [J]. *Journal of Minnan Normal University (Natural Science)*, 2021, 34(2): 36-44.
- [15] 周银凤,李进金. 形式背景下的技能约简与评估 [J]. *计算机科学与探索*, 2022, 16(3): 692-702.
ZHOU Y F, LI J J. Skill reduction and assessment in formal context [J]. *Journal of Frontiers of Computer Science and Technology*, 2022, 16(3): 692-702.
- [16] ZHOU Y F, LI J J, YANG H, et al. Knowledge structure construction and skill reduction methods based on multi-scale context [J]. *Journal of Experimental &*

Theoretical Artificial Intelligence, 2024, 36 (8): 1923-1942.

[17] 周银凤,李进金,冯丹露,等. 形式背景下的学习路径与技能评估[J]. 模式识别与人工智能, 2021, 34(12): 1069-1084.

ZHOU Y F, LI J J, FENG D L, et al. Learning paths and skills assessment in formal context[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2021, 34(12): 1069-1084.

[18] 周银凤. 形式背景下构建知识结构与寻找学习路径的方法研究[D]. 漳州: 闽南师范大学, 2022.

[19] ZHOU Y F, LI J J, YANG H L, et al. Knowledge structures construction and learning paths recommendation based on formal contexts [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2024, 15(4): 1605-1620.

[20] HELLER J, ÜNLÜ A, ALBERT D. Skills, competencies and knowledge structures [C] // Knowledge Spaces: Applications in Education. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2013: 229-242.

[21] DÜNTSCH I, GEDIGA G. Modal-style operators in qualitative data analysis[C] //2002 IEEE International Conference on Data Mining. Maebashi City, Japan: IEEE, 2002: 155-162.

[22] YAO Y Y. A comparative study of formal concept analysis and rough set theory in data analysis [C] // Rough Sets and Current Trends in Computing (RSCTC 2004). Uppsala, Sweden: Springer Berlin Heidelberg, 2004: 59-68.

[23] YAO Y Y. Concept lattices in rough set theory [C] // IEEE Annual Meeting of the Fuzzy Information, 2004. Banff, AB, Canada: IEEE, 2004, 2: 796-801.

[24] WANG D L, XU Q Y, LI J J, et al. Skill hierarchy structure based skill assessment and learning paths [J]. International Journal of General Systems, 2024, 53(1): 97-125.

[25] 智慧来,张丽,李金海. 旁观者视角下粒的多层次描述[J]. 电子学报, 2022, 50(11): 2568-2574.

ZHI H L, ZHANG L, LI J H. Multi-Level description of granules from an outsider's perspective [J]. Acta Electronica Sinica, 2022, 50(11): 2568-2574.

(编 辑 张 欢)